مقدمه ناشر

معمولاً وقتی که صبح از خواب بیدار می‌شیم، برنامه‌هایی که برای طول روزمون داریم، تو ذهنمون مرور می‌شن که امروز باید فلان کار رو انجام بدیم، یا به فلان جا بریم برای دیدن یک شخص، حالا می‌تونه کاری یا غیرکاری باشه (☺). یا باید امروز ۸ ساعت مفید درس بخونیم و مثلاً بیشتر روی درس ریاضی یا فیزیک زمان بذاریم.

معمولاً اوایل ماجرا، انرژی کافی داریم و همه چی خوب پیش می‌ره، اما اگه آخر شب به یه سری از برنامه‌های طول روزمون نرسیم حس ناتمومی کار بهمون دست می‌ده! یه حسی شبیه عذاب وجدان که کارمون به نحو احسنت انجام نشده!

کلن انتهای یه کار خیلی مهم و تأثیرگذاره و خوب انجام‌دادن آخر یه کار خیلی ارزشمنده (قدیمی‌ها یه ضرب‌المثل دارن که می‌گه، کار را که کرد آن‌که تمام کرد (☺).

تو پروژهٔ «آماده‌شدن برای کنکور» هم آخرای ماجرا مهم‌تره و کسی برنده است که کار رو خوب تمومه کنه! با یه جمع‌بندی خوب، می‌تونیم خودمون رو واسه یه رقابت سرسخت و تنگاتنگ آماده‌تر کنیم. از اون‌جا که ما خیلی‌سبز هستیم، پس سعی می‌کنیم هر کاری رو خیلی خوب انجام بدیم! توی کتابای جمع‌بندی خیلی‌سبز، خواستیم با تغییرات جالب و گسترده‌ای که دادیم خیلی‌خیلی متفاوت باشیم و همهٔ مطالب و مباحث رو به بهترین شکل ممکن طبقه‌بندی کنیم.

خلاصه این‌که: جمع‌بندی‌کردن رو جدی بگیرید و خیلی خوب و با صبر و حوصلهٔ فراوان این کار رو به ته برسونید تا ته ماجرا اون حس بده نیاد سراغتون! ما هم که این‌جا خیلی‌خیلی هواتونو داریم.

دوستون داریم.

«خط‌به‌خط این کتاب، با احترام
تقدیم به همهٔ دانش‌آموزان و معلم‌های عزیز»

به کتاب جمع‌بندی حسابان و ریاضیات پایه خوش آمدید.

من همیشه به دنبال یک جواب منطقی برای این سؤال دانش‌آموزان بودم:

«استاد! کدوم قسمت‌ها مهم‌تر هستن که اون‌ها رو بیشتر بخونیم، برای چه نکاتی کم‌تر وقت بذاریم؟»

سعی کردم با تألیف این کتاب، جواب آبرومندی برای دانش‌آموزان عزیزم، آماده کرده باشم.

توی این کتاب، سعی کردیم «دست‌اندازها» رو از سر راه یادگیری دانش‌آموزان برداریم و «ترمز» پیشرفت در فراگیری مطالب نباشیم.

با استفاده از تجربهٔ سال‌ها تدریس و بارها تألیف، گفتنی‌ها رو گفتیم و از گفتن هر آن‌چه که ممکن بود دانش‌آموز عزیزمون رو از مسیر اصلی دور کنه پرهیز کردیم، در واقع:

«این تمام چیزی بود که می‌خواستیم بگیم، نه تمام چیزی که می‌تونستیم بگیم»

شاید سخت‌ترین قسمت تألیف این کتاب، «مقاومت» در برابر نوشتن مطالبی بود که در طول سال خوندنشون خالی از لطف نیست ولی قطعاً در کتاب جمع‌بندی مسیر پیشرفت رو ناهموار می‌کنه.

این کتاب شامل ۱۱ فصل هست که تمام مباحث هر سه پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم رو در بر می‌گیره. مهم‌ترین ویژگی‌های این کتاب به نظرم این‌ها هستن:

۱ تیپ‌بندی تست‌های هر مبحث

۲ درس‌نامه‌های آموزشی کاربردی برای هر تیپ از هر مبحث

۳ ارائهٔ مثال حل‌شده داخل درس‌نامه بلافاصله بعد از بیان هر نکته، برای درک بهتر.

۴ پاسخ‌های تشریحی جذاب که گاهی با ارائهٔ راه دوم یا راه سوم، سعی شده راه‌حل‌های خلاقانه و ایده‌های زیبا در حل مسائل بیان بشه.

۵ ستاره‌داربودن کادر درس‌نامه‌ها، برای بیان اهمیت اون درس‌نامه در کنکور

از این نکته هم غافل نباشید که اگرچه تنوع و حل مسائل مختلف مهمه، اما مهم‌تر از اون کیفیت تسلط به سؤالات هست، یعنی اگر یک کتاب تست رو خیلی خوب کار کنید، بهتر و مؤثرتر هست تا این‌که چندین کتاب مختلف رو سطحی مطالعه و تمرین کنید.

پس اگر احساس می‌کنید از مطالعاتی که انجام دادید راضی نیستید، این کتاب رو اونقدر تمرین کنید تا کاملاً به تست‌ها مسلط شوید.

متواضعانه ازتون می‌خوام نظر، پیشنهاد و انتقاد خودتون از طریق این آیدی برای من بفرستید.

mahdiazizi_math

و در نهایت:

سپاس از همسر عزیزم که حضورش پشتوانه‌ای بس عظیم برای من است.

سپاس از مدیریت محترم انتشارات خیلی‌سبز، جناب آقای دکتر نصری

سپاس از مدیر تألیف این کتاب، دوست عزیزم جناب آقای مهندس نوید شاهی

سپاس از استاد محسن فراهانی که بدون همکاری و صبوری ایشون، تألیف این کتاب ممکن نبود.

فهرست

فهرست

فصل ۶ تعیین علامت و نامعادله

در یک کلام، آچار فرانسه است. در فصل‌های تابع، حد و کاربرد مشتق حسابی به کار میاد.

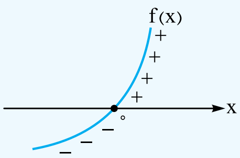
پیش‌نیازهای این فصل: اتحادها و خواص نامساوی‌ها، نمودار قدر مطلق و رادیکال

مهم‌ترین مبحث این فصل: نامعادلات گویا

فصل‌های منطبق با کتاب درسی: فصل ۴ ریاضی ۱

۱ تعیین علامت توابع درجه ۱ یا درجه ۲

علامت $f(x)$ اگر نمودار تابع $f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، در این صورت:

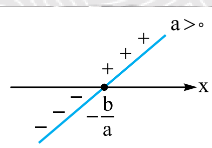
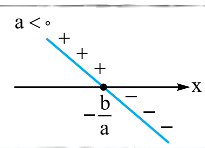


نمودار تابع f بالای محور xها است. $\Rightarrow f(x) > 0$

نمودار تابع f با محور xها برخورد می‌کند. $\Rightarrow f(x) = 0$

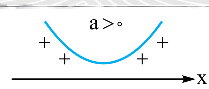
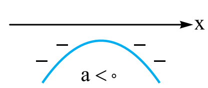
نمودار تابع f پایین محور xها است. $\Rightarrow f(x) < 0$

نکته ۱ علامت چندجمله‌ای درجه‌اول به صورت $P(x) = ax + b$ در اطراف ریشه‌اش عوض می‌شود که در جدول تعیین علامت، علامت خانهٔ اول از سمت راست، همان علامت a (ضریب x) است:

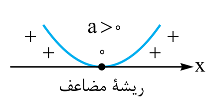
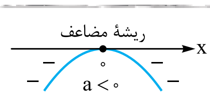
$P(x) = ax + b$	نمودار	ویژگی	نمونه
$\begin{array}{c\|ccc} x & & -\frac{b}{a} & \\ \hline P(x) & - & 0 & + \end{array}$		شیب مثبت $(a > 0)$	$\begin{array}{c\|ccc} x & & 3 & \\ \hline 2x - 6 & - & 0 & + \end{array}$
$\begin{array}{c\|ccc} x & & -\frac{b}{a} & \\ \hline P(x) & + & 0 & - \end{array}$		شیب منفی $(a < 0)$	$\begin{array}{c\|ccc} x & & 3 & \\ \hline 3 - x & + & 0 & - \end{array}$

نکته ۲ علامت چندجمله‌ای درجه‌دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ برحسب تعداد ریشه‌هایش سه حالت دارد:

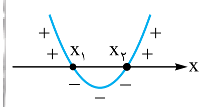
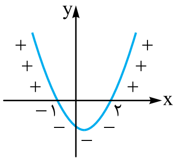
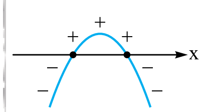
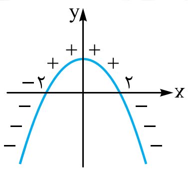
حالت اول: اگر فاقد ریشه باشد $(\Delta < 0)$، علامت آن همواره موافق علامت a است:

	$ax^2 + bx + c$	نمودار	نمونهٔ جدول تعیین علامت	اصطلاح
$\Delta < 0$	$a > 0$		$\begin{array}{c\|cc} x & -\infty & +\infty \\ \hline x^2 + 1 & & + \end{array}$	همواره مثبت
	$a < 0$		$\begin{array}{c\|cc} x & -\infty & +\infty \\ \hline -x^2 + x - 1 & & - \end{array}$	همواره منفی

حالت دوم: اگر ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ مساوی) داشته باشد $(\Delta = 0)$، علامت در اطراف ریشه عوض نمی‌شود و علامت آن همواره همان علامت a است.

	$ax^2 + bx + c$	نمودار	جدول تعیین علامت	نمونه	اصطلاح
$\Delta = 0$	$a > 0$		$\begin{array}{c\|ccc} x & & -\frac{b}{2a} & \\ \hline P(x) & + & 0 & + \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & & 2 & \\ \hline x^2 - 4x + 4 & + & 0 & + \end{array}$	نامنفی
	$a < 0$		$\begin{array}{c\|ccc} x & & -\frac{b}{2a} & \\ \hline P(x) & - & 0 & - \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & & 1 & \\ \hline -x^2 + 2x - 1 & - & 0 & - \end{array}$	نامثبت

حالت سوم: اگر چندجمله‌ای درجه‌دوم، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، علامت چندجمله‌ای در اطراف ریشه‌ها عوض می‌شود که باز هم علامت اولین خانه از سمت راست در جدول، همان علامت ضریب x^2 یعنی علامت a است.

ax^2+bx+c		نمودار	جدول تعیین علامت	نمونه
$\Delta>0$	$a>0$		$\begin{array}{c\|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline P(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & & -1 & & 2 & \\ \hline x^2-x-2 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ 
	$a<0$		$\begin{array}{c\|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline P(x) & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & & -2 & & 2 & \\ \hline 4-x^2 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$ 

وایسا ترو! حواست به تفاوت دو مورد زیر باشه:

$P(x)=x-5 \xrightarrow{\text{خانهٔ اول از راست}>0} P(x)=x-5$ یا $5-x$ $\xrightarrow{\text{مثلاً}}$ $x=5$ ریشهٔ سادهٔ $P(x)$ است. $\Rightarrow$ $\begin{array}{c\|ccc} x & & 5 & \\ \hline P(x) & - & 0 & + \end{array}$

$P(x)=(x-5)^2 \xrightarrow{\text{مثلاً}}$ $x=5$ ریشهٔ مضاعف $P(x)$ است. $\Rightarrow$ $\begin{array}{c\|ccc} x & & 5 & \\ \hline P(x) & + & 0 & + \end{array}$

۴۴۷- جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=(m+1)x^2+6x+m-7$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $m+n$ کدام است؟

$\begin{array}{c\|ccc} x & & n & \\ \hline P(x) & - & 0 & - \end{array}$

۱) 1 ۲) -1 ۳) 11 ۴) -11

۴۴۸- اگر نامساوی $(m+1)x^2-8x+m+1\le 0$ به ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشد، حدود m کدام است؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) $-5\le m<-1$ ۲) $m\le -5$ ۳) $m<-1$ ۴) $m>-1$

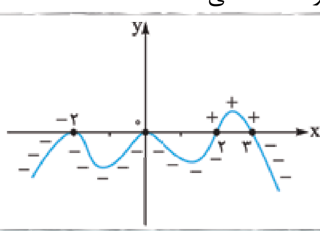
۴۴۹- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=ax+b$ به شکل روبه‌رو باشد، جدول تعیین علامت عبارت $f(x)=a-bx$ کدام است؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

$\begin{array}{c\|ccc} x & & 3 & \\ \hline P(x) & + & 0 & - \end{array}$

۱) $\begin{array}{c\|ccc} x & & \frac{1}{3} & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array}$ ۲) $\begin{array}{c\|ccc} x & & \frac{1}{3} & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$ ۳) $\begin{array}{c\|ccc} x & & -\frac{1}{3} & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array}$ ۴) $\begin{array}{c\|ccc} x & & -\frac{1}{3} & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$

۲ تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها در حالت کلی

برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها با هر درجهٔ دلخواه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله	تعیین علامت سریع	$P(x)=x(x^2-3x)(4-x^2)(x+2)^3$
۱	عبارت را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌ها به دست آیند.	$P(x)=x(x(x-3))(2-x)(2+x)(x+2)^3=\underbrace{x^2}_{x=0}\underbrace{(x-3)}_{x=3}\underbrace{(2-x)}_{x=2}\underbrace{(2+x)^4}_{x=-2}$ ریشهٔ مضاعف ($x=0$)، ریشهٔ مضاعف ($x=-2$)
۲	ریشه‌ها را در جدول، به ترتیب از چپ به راست (و از کوچک به بزرگ) می‌نویسیم.	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & & -2 & & 0 & & 2 & & 3 & \\ \hline P(x) & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$
۳	علامت ضریب جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد، همان علامت خانهٔ اول، از سمت راست است.	این چندجمله‌ای از درجهٔ ۸ است و جمله با بزرگ‌ترین درجهٔ آن $-x^8$ است؛ پس علامت خانهٔ اول از سمت راست «منفی» است. $\begin{array}{c\|ccccccccc} x & & -2 & & 0 & & 2 & & 3 & \\ \hline P(x) & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & - \end{array}$
۴	علامت‌ها از سمت راست، یکی‌درمیان عوض می‌شوند، به‌جز در ریشه‌های مضاعف (تکراری) که علامت تغییر نمی‌کند.	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & & -2 & & 0 & & 2 & & 3 & \\ \hline P(x) & - & 0 & - & 0 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$ $\xrightarrow[\text{شبیه‌این‌می‌شود}]{\text{نمودار } P(x)}$ 

وایسا ترو! دقت کنید که چون علامت خانهٔ اول از سمت راست در جدول منفی است؛ یعنی شاخهٔ سمت راست نمودار (برای $x>3$) زیر محور xها قرار دارد.

۴۵۰- جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=x^3+ax^2+5x+b$ به صورت روبه‌رو است. حاصل $a\times b$ کدام است؟

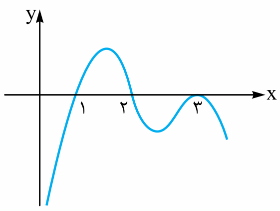
x		-2		-1	
P(x)	$-$	۰	$+$	۰	$+$

۱) -8
۲) 6
۳) -6
۴) 8

۴۵۱- عبارت $P(x)=(x^2-4x+3)(2x^2+ax+b)$ همواره نامنفی است. $a-b$ کدام است؟ (برگرفته ازتمرین کتاب درسی)

۱) 2
۲) 14
۳) -14
۴) -2

۴۵۲- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه عبارت $y=f(x)(x^2-5x+4)$ در بازهٔ (a,b) مثبت است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) 4
۲) 3
۳) 2
۴) 1

۳ تعیین علامت عبارات گویا

تعیین علامت یک عبارت کسری گویا، شبیه تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها است، فقط بدانید:

۱) ریشه‌های مخرج کسر، عبارت را تعریف‌نشده می‌کنند.

۲) ریشه‌های صورت کسر، عبارت را صفر می‌کنند.

۳) این‌جا هم علامت خانهٔ اول از سمت راست، از ضرب علامت ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ هر عبارت، به دست میاد، فقط در نهایت علامت صورت را به علامت مخرج تقسیم می‌کنیم. (یا این‌که حاصل عبارت گویا را به ازای عددی دلخواه و بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، مشخص می‌کنیم.)

۴) علامت‌ها از سمت راست یکی‌درمیان عوض می‌شوند، به‌جز در ریشه‌های مضاعف (تکراری).

مثلاً عبارت گویای $P(x)=\dfrac{4-x^2}{x^3-2x^2+x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

ابتدا صورت و مخرج را تجزیه و ریشه‌یابی می‌کنیم:

$$P(x)=\frac{\overset{x=2}{(2-x)}\overset{x=-2}{(2+x)}}{\underset{x=0}{x}\ \underset{x=1}{(x-1)^2}}$$

فقط $x=1$ ریشهٔ مضاعف است. ضمناً علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ها در صورت $(-x^2)$ و در مخرج (x^3) را که ضرب کنیم، حاصل منفی می‌شود:

x		-2		۰		۱		۲	
P(x)	$+$	۰	$-$	تن	$+$	تن	$+$	۰	$-$

یا مثلاً به ازای عددی بزرگ‌تر از ۲، مثلاً $x=3$ حاصل $P(x)$ منفی می‌شود، پس خانهٔ اول از سمت راست منفی خواهد بود.

وایسا ترو! *اگر یک عدد هم ریشهٔ صورت باشه هم ریشهٔ مخرج، چه کنیم؟*

صورت و مخرج رو ساده کنید، فقط بدونید اون عدد عضو دامنهٔ عبارت نیست، مثلاً به تعیین علامت زیر دقت کنید:

$$\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}>0 \xrightarrow{x\neq 2} \frac{x}{x+1}>0 \Rightarrow$$

		-1		۰	
	$+$	تن	$-$	۰	$+$

$$\xrightarrow{>0} x<-1 \text{ یا } x>0 \xrightarrow{x\neq 2} x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)-\{2\}$$

۴۵۳- عبارت $P(x)=\dfrac{(2x^2-3x-5)(x+1)}{(x^2+x+1)(1-x)}$ در بازهٔ (a,b) مثبت است. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 1
۲) $1/5$
۳) 2
۴) $2/5$

۴۵۴- جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\dfrac{(x+d)(x-a)^2}{ax^2+bx+c}$ به صورت روبه‌رو است. مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

x		$-\frac{1}{2}$		۰		۴	
P(x)	$-$	تن	$-$	۰	$+$	۰	$+$

۱) 7
۲) 8
۳) 9
۴) 10

۴۵۵- عبارت $A=\dfrac{(m-2)x^2+6x+2m-1}{-x^2-2x-7}$ به ازای هر x، منفی است. حدود m کدام است؟

۱) $m<-1$
۲) $m>3/5$
۳) $m>2/5$
۴) $2<m<3/5$

۴۵۶- فرض کنید مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\dfrac{((m^2-1)x^2-4mx+4)(x-3\sqrt{x}+2)}{2x-3}>0$، به ازای $x>\dfrac{3}{2}$، بازهٔ $(2,4)$ باشد. مقدار m کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) -2
۲) صفر
۳) 1
۴) 2

۴۵۷- اگر $\dfrac{4-2x}{3x+1}\geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

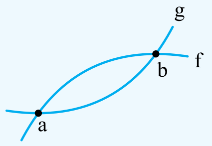
۱) 5
۲) 6
۳) 7
۴) 8

۴ نامعادلات چندجمله‌ای

برای حل نامعادلات چندجمله‌ای به فُرم $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$ دو راه اصلی وجود دارد:

راه اول: نامعادله را به شکل $f(x) - g(x) > 0$ نوشته، آن را ساده کرده و عبارت نهایی را تعیین علامت کنیم.

راه دوم: با استفاده از رسم نمودار توابع فرض $f(x)$ و $g(x)$ ببینیم:



۱) کجا یکدیگر را قطع کرده‌اند $\Leftarrow f(x) = g(x) \Leftarrow x = b , x = a$

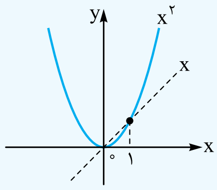
۲) کجا نمودار f بالای نمودار g است $\Leftarrow f(x) > g(x) \Leftarrow a < x < b$

۳) کجا نمودار f پایین نمودار g است $\Leftarrow f(x) < g(x) \Leftarrow x < a$ یا $x > b$

مثال فرض کنید $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$؛ در این صورت:

$$f(x) > g(x) \xrightarrow{\text{یعنی}} x^2 > x \xrightarrow{\text{یعنی}} x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & & 1 & \\ \hline \oplus & & - & & \oplus \end{array}$$

$x < 0$ یا $x > 1$



طبق شکل دقیقاً در فواصل $x > 1$ یا $x < 0$ نمودار $y = x^2$ بالای نمودار $y = x$ است.
بدیهی است که در فاصلهٔ $0 < x < 1$، نمودار $y = x^2$ پایین نمودار $y = x$ است؛ یعنی جواب نامعادلهٔ $x^2 < x$ همان جواب نامعادلهٔ $x^2 - x < 0$؛ یعنی بازهٔ $0 < x < 1$ است.

نکته توپ اگر دو تابع f و g پیوسته باشند، بازهٔ جواب نامعادلاتی به فرم $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$ از نقاط برخورد دو تابع f و g ساخته می‌شود:

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

یعنی جواب نامعادلات $x^2 > x$ یا $x^2 < x$ بازه‌هایی هستند که اول و آخر آن‌ها $x = 0$ یا $x = 1$ است.

۴۵۸- در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۵ نامعادلات کسری

هنگام حل نامعادلات به صورت $f(x) > g(x)$ اگر f یا g کسری باشند، حق طرفین‌وسطین‌کردن نداریم، بلکه باید همهٔ عبارات را به یک طرف برده، ساده کنیم و تعیین علامت کنیم، مگر در یک حالت:
عبارت مخرج همواره مثبت یا همواره منفی باشد. (در حالت منفی، بعد از طرفین‌وسطین‌کردن، جهت نامعادله عوض می‌شود.)

مثال نامعادلات زیر را ببینید:

۱) $\frac{2x}{x+3} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x}{x+3} - 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x-3}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & -3 & & 3 & \\ \hline + & \text{تن} & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow -3 < x \leq 3$

۲) $\frac{4x}{x^2+3} \leq 1 \xrightarrow[\text{طرفین‌وسطین}]{\text{مخرج همواره‌مثبته}} 4x \leq x^2 + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & & 3 & \\ \hline + & & - & & + \end{array}$ $x \leq 1$ یا $x \geq 3$

وایسا ترو! *هنگام حل نامعادلات، اگر جواب نامعادله در گزینه‌ها به صورت «بازه» بیان شده باشه، می‌تونیم با امتحان گزینه‌ها، سؤال رو حل کنیم؛ یعنی: «عددی که باعث تفاوت بین گزینه‌ها می‌شه رو انتخاب و در نامعادله چک کنیم.»*

مثال جواب نامعادلهٔ $\frac{3x+1}{2x-6} < 1$ را از بین گزینه‌های زیر مشخص می‌کنیم:

۱) $(-\infty, -7)$ ۲) $(3, \infty)$ ۳) $(-7, 3)$ ۴) $(-\infty, -7) \cup (3, \infty)$

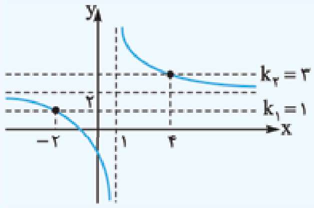
عددی انتخاب می‌کنیم که بین گزینه‌ها تفاوت ایجاد کند، مثلاً $x = 4$ که در بعضی گزینه‌ها هست و در بعضی‌ها نیست:

$\boxed{x = 4} \Rightarrow \frac{12+1}{8-6} < 1 \Rightarrow \frac{13}{2} < 1$ نادرست $\Rightarrow$ رد گزینه‌های (۲) و (۴)

حالا برای بررسی تفاوت گزینه‌های (۱) و (۳) می‌توانیم $x = 0$ را امتحان کنیم:

$\boxed{x = 0} \Rightarrow \frac{0+1}{0-6} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{6} < 1$ درست $\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) عدد $x = 0$ را دارد $\Rightarrow$ جواب گزینهٔ (۳)

نکته توپ در نامعادلاتی به شکل $k_1 < \frac{ax+b}{cx+d} < k_2$، اگر نامساوی‌ها را به مساوی تبدیل کنیم، xهای به دست آمده از معادلات $\frac{ax+b}{cx+d} = k_1$ و $\frac{ax+b}{cx+d} = k_2$ اعداد ابتدا یا انتهای بازهٔ جواب نامعادله هستند. مثلاً جواب نامعادلهٔ $1 < \frac{2x+1}{x-1} < 3$، یعنی فواصلی که نمودار $y = \frac{2x+1}{x-1}$ بین دو خط $y = 1$ و $y = 3$ باشد.



$$\frac{۲x+۱}{x-۱}=۱ \Rightarrow ۲x+۱=x-۱ \Rightarrow x=-۲$$

$$\frac{۲x+۱}{x-۱}=۳ \Rightarrow ۲x+۱=۳x-۳ \Rightarrow x=۴$$

برای $x>۴$ یا $x<-۲$ نمودار تابع بین دو خط $y=۱$ و $y=۳$ قرار دارد.

پس جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{۲x+۱}{x-۱}<۳$ به شکل $(-\infty,-۲)\cup(۴,+\infty)$ است و اعداد ۲- و ۴ ریشه‌های معادلات $۱=\frac{۲x+۱}{x-۱}=۳$ هستند.

۴۵۹- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲}>\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$، به صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-۴,۲)\cup(۲,۳)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

۴۶۰- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$، در بازهٔ (a,b) پایین‌تر از خط به معادلهٔ $y=۲$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ∞

۴۶۱- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳$، کدام است؟

۱) $(۰/۶,۱/۵)$ ۲) $(۰/۸,۱/۲)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۰/۸,۲)$

۴۶۲- اگر $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ باشد، مجموعه مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ چند عضو دارد؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶۳- نمودار تابع $y=\frac{۲}{x^۲-۳x+۲}$، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=۰$ و $y=-۲$ واقع می‌شود؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۶ نامعادلات رادیکالی

برای حل نامعادلات شامل رادیکال:

راه اول: با توجه به فرجهٔ رادیکال شرط تعریف‌شده‌بودن عبارت داده‌شده را چک می‌کنیم، سپس با توان‌رسانی، رادیکال را حذف کرده و نامعادله را حل می‌کنیم. در نهایت بین دامنه و xهای به دست آمده از حل نامعادله اشتراک می‌گیریم.

$$\sqrt{\bigcirc}>\square \xrightarrow{\text{شرط}} \bigcirc\geq ۰ \xrightarrow{\text{حالا}} \text{طرفین به توان۲}$$

$$\sqrt{\bigcirc}<\square \xrightarrow{\text{شرط}} \begin{cases}\bigcirc\geq ۰\\ \square>۰\end{cases} \xrightarrow{\text{حالا}} \text{طرفین به توان۲}$$

راه دوم: استفاده از رسم شکل و این‌که «کجا! کدام نمودار بالاتر یا پایین‌تر هست».

راه سوم: اگر جواب نامعادله در گزینه‌ها به شکل بازه بود $\Leftarrow$ امتحان گزینه‌ها

مثلاً نامعادلهٔ $\sqrt{x+۳}<x+۱$ را حل می‌کنیم:

راه اول: **اولاً**: شرط تعریف عبارت را به دست می‌آوریم:

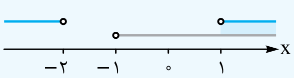
$$\begin{cases}x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳\\ x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱\end{cases} \xrightarrow{\cap} x>-۱ \quad (I)$$

ثانیاً: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+۳<(x+۱)^۲ \Rightarrow x+۳<x^۲+۲x+۱$$

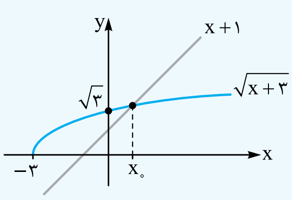
$$\Rightarrow x^۲+x-۲>۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)>۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & & -۲ & & ۱ & \\ \hline & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \Rightarrow x<-۲ \text{ یا } x>۱ \quad (II)$$

حالا بین جواب دو مرحله، اشتراک می‌گیریم:



$$\Rightarrow \boxed{x>۱}$$

راه دوم: در شکل، $x_۰$ نقطهٔ برخورد دو تابع است:



$$\sqrt{x+۳}=x+۱ \xrightarrow[\text{حدس بزن}]{\text{تابلو}} x_۰=۱$$

طبق شکل در بازهٔ $x>۱$ نمودار $y=\sqrt{x+۳}$ پایین نمودار $y=x+۱$ است.

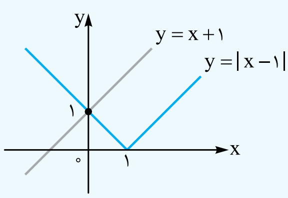
۴۶۴- جواب نامعادلهٔ $x+\sqrt{x}\leq ۶$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(۰,۴)$ ۲) $\mathbb{R}-[۰,۴]$ ۳) $\mathbb{R}-(۰,۴)$ ۴) $[۰,۴]$

تیپ اول: نامعادلات کلاسیک:

نامعادله		جواب	نمونه
$\lvert u\rvert<a$	$a<0$	جواب ندارد.	$\lvert x+4\rvert<-3 \Rightarrow$ امکان پذیر نیست.
	$a\ge 0$	$-a<u<a$	$\lvert 2x-3\rvert<5 \Rightarrow -5<2x-3<5$ $\Rightarrow -2<2x<8 \Rightarrow -1<x<4$
$\lvert u\rvert>a$	$a\le 0$	همواره جواب دارد.	$\lvert x-5\rvert>-6 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$
	$a>0$	$u<-a$ یا $u>a$	$\frac{1}{\lvert 2x-1\rvert}\le\frac{1}{3} \xrightarrow[\text{عکس}]{x\neq\frac{1}{2}} \lvert 2x-1\rvert\ge 3$ $\Rightarrow 2x-1\le -3$ یا $2x-1\ge 3 \Rightarrow x\le -1$ یا $x\ge 2$
$\lvert f(x)\rvert\ge\lvert g(x)\rvert$		به توان ۲ رساندن طرفین	$\lvert x+2\rvert\ge\lvert x\rvert \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+4x+4\ge x^2$ $\Rightarrow 4x+4\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$
$\lvert f(x)\rvert\le\lvert g(x)\rvert$		به توان ۲ رساندن طرفین	$\lvert 2x-1\rvert<\lvert x-3\rvert \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x-1)^2<(x-3)^2$ $\Rightarrow (2x-1)^2-(x-3)^2<0$ $\xrightarrow{\text{مزدوج}} (x+2)(3x-4)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2<x<\frac{4}{3}$

تیپ دوم: استفاده از رسم نمودار



مثلاً جواب نامعادلهٔ $|x-1|<x+1$ را به دست می‌آوریم. یعنی می‌خواهیم ببینیم در چه بازه‌ای نمودار $y=|x-1|$ پایین نمودار $y=x+1$ قرار دارد. واضح است که $x=0$ طول نقطهٔ برخورد دو نمودار است. در بازهٔ $(0,+\infty)$ نمودار $y=|x-1|$ پایین نمودار $y=x+1$ قرار دارد.

وایسا ترو کماکان اگر گزینه‌ها به صورت بازه بود، از امتحان گزینه‌ها استفاده کنید.

نکته مهم در حل نامعادلاتی به شکل $\left|\frac{\square}{\bigcirc}\right|<a$ یا $\left|\frac{\square}{\bigcirc}\right|>a$، اگر گزینه‌ها بازه‌ای نبود که عددگذاری کنیم، بهتر است با کنارگذاشتن ریشهٔ مخرج این‌گونه عمل کنیم:

$$\left|\frac{\square}{\bigcirc}\right|<a \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} |\square|<a|\bigcirc| \xrightarrow{\text{توان ۲}} \cdots \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} \cdots \xrightarrow{\text{مزدوج}} \cdots \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ☺$$

مثلاً جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{2x+3}{x-1}\right|\ge 1$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow[\text{ریشهٔ مخرج}]{x\neq 1} |2x+3|\ge|x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x+3)^2\ge(x-1)^2 \Rightarrow (2x+3)^2-(x-1)^2\ge 0$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (2x+3+x-1)(2x+3-x+1)\ge 0 \Rightarrow (3x+2)(x+4)\ge 0 \Rightarrow$$

	-4		$-\frac{2}{3}$	
+	0	−	0	+

بنابراین $x\in(-\infty,-4]\cup[-\frac{2}{3},+\infty)-\{1\}$ می‌باشد.

تذکر اگر رسم نمودار قدرمطلقی سخت بود یا تیپ معروفی نبود، براساس ریشهٔ داخل قدرمطلق، نامعادله را حالت‌بندی می‌کنیم و بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم.

مثلاً نامعادلهٔ $(x-2)|x|\ge 3$ را حل می‌کنیم:

ریشهٔ داخل قدرمطلق $x=0$ است:

$$\begin{cases} x\ge 0 \Rightarrow (x-2)x\ge 3 \Rightarrow x^2-2x-3\ge 0 \Rightarrow (x-3)(x+1)\ge 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -1 & & 3 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array} \xrightarrow{x\ge 0} [3,+\infty) \\ x<0 \Rightarrow (x-2)(-x)\ge 3 \Rightarrow x^2-2x+3\le 0 \xrightarrow[a>0]{\Delta<0} \text{همواره مثبت است.} \Rightarrow \varnothing \end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله به این شکل است: $\varnothing\cup[3,+\infty)=[3,+\infty)$

۴۶۵- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^{۲}-mx+n\geq ۰$ به صورت $|x-۴|\geq ۳$ است. حاصل $m+n$ کدام است؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

۴۶۶- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|x^{۲}-۲x|<x$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

۴۶۷- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|>۱$، به صورت کدام بازه است؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(۱,\frac{۵}{۳})-\{\frac{۳}{۲}\}$ ۳) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ ۴) $(\frac{۵}{۳},۲)$

۴۶۸- در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|۲x^{۲}-۴|$ در زیر خط $y=۲x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶۹- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $۲x+۱-|x-۲|>|x^{۲}+۱|$، به صورت کدام بازه است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

۴۷۰- در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع $y=\sqrt{x+۳}$، در بالای نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۲$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۷۱- مجموع اعداد صحیحی که در مجموعه‌جواب‌های نامعادلهٔ $||x-۱|-۳|<۴$ قرار دارند، کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) صفر

۴۷۲- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|x+۱|+|x-۷|>۶$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $|x-۳|<۳$ ۴) $|x-۲|<۱$

۴۷۳- در بازهٔ (a,b) عبارت $۱۵x^{۲}+۷۳x+۱۴$ منفی و عبارت $|\frac{x-۱}{۲}-۱|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۶۷}{۱۵}$

آزمون

برای مشاهدهٔ پاسخ‌های تشریحی این آزمون، Qr Code صفحهٔ شناسنامهٔ کتاب را اسکن کنید.

۱- به ازای چه مقادیری از m، جدول تعیین علامت عبارت $f(x)=(m^{۲}-m-۲)x^{۲}+(m-۱)x+\frac{۱}{۴}$ به صورت زیر است؟

x		x_1		x_2	
$f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

۱) $(-\infty,۳)$ ۲) $(۲,۳)$ ۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(-۱,۲)$

۲- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}-۴x^{۲}-x+۴$ با شرط $x>-۱$ در بازهٔ (a,b) زیر محور xها قرار دارد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- علامت عبارت $P(x)=\frac{ax+۱۲}{۳x+b}$ فقط در بازهٔ $(-۱,۶)$ مثبت است. حاصل $a-b$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) -۶ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) -۵

۴- مجموعه‌جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x^{۲}-x-۶}{x^{۲}-۳x-۱۰}\geq ۲$ بازهٔ $(a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۵- در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $f(x)=۵-|x-۱|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x)=|۲x|$ قرار دارد؟

۱) $(-\frac{۴}{۳},۱)$ ۲) $(-\frac{۲}{۳},۱)$ ۳) $(-\frac{۴}{۳},۲)$ ۴) $(-\frac{۲}{۳},۲)$

۴۴۱ **گزینه ۲** **اولاً**: $x=۰$ مجانب قائم است؛ پس ریشهٔ مخرج است، یعنی $b=۰$ است.

ثانیاً: تابع از نقطهٔ $(۲,۰)$ می‌گذرد؛ پس:

$$y=\frac{ax^۲-۱}{x}\xrightarrow{(۲,۰)}۰=\frac{۴a-۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $a+b=\frac{۱}{۴}$ است.

۴۴۲ **گزینه ۴** **اولاً**: $y=۲$ مجانب افقی است؛ پس $a=۲$ می‌باشد:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=۲\Rightarrow a=۲$$

ثانیاً: $x=\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ صورت است، چون تابع را صفر کرده (به محور x برخورد کرده).

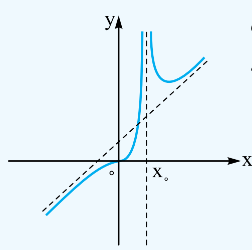
ثالثاً: چون نمودار حفره دارد، پس طول آن حفره هم ریشهٔ مخرج است و هم ریشهٔ صورت، ضمناً از $\frac{۱}{۲}$ هم بزرگ‌تر است.

$$f(x)=\frac{۲x^۲+bx+c}{(x+۳)(x-۲)}$$

ریشه‌های مخرج $x=۲$ و $x=-۳$ هستند. $x=۲$ که از $\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر است، طول حفره است؛ پس ریشهٔ صورت هم هست. بنابراین ریشه‌های صورت $x=۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ هستند.

$$۲x^۲+bx+c\xrightarrow[x_۲=\frac{۱}{۲}]{x_۱=۲}\begin{cases}S=\frac{۵}{۲}=-\frac{b}{۲}\Rightarrow b=-۵\\ P=۱=\frac{c}{۲}\Rightarrow c=۲\end{cases}$$

۴۴۳ **گزینه ۴** **اولاً**: نمودار تابع f دارای انفصال مضاعف است؛ پس مخرج، ریشهٔ مضاعف مثبتی به نام $x_۰$ دارد:



$$x^۲+bx+۱\xrightarrow{\text{مضاعف}}(x-۱)^۲\ \text{یا}\ (x+۱)^۲$$

چون $x_۰$ مثبت است؛ پس مخرج کسر به شکل $(x-۱)^۲$ یعنی $x^۲-۲x+۱$ است تا $x_۰=۱$، ریشهٔ آن باشد؛ بنابراین $b=-۲$ است.

ثانیاً: نمودار تابع f فقط یک ریشهٔ $x=۰$ دارد (شبیه به لُرا)؛ پس در صورت کسر $a=۰$ بوده تا فقط $x^۳$ باقی بماند و یک ریشهٔ $x=۰$ داشته باشد.

بنابراین $f(x)=\frac{x^۳}{(x-۱)^۲}$، حالا min را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{x^۳}{(x-۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲(x-۱)^۲-۲(x-۱)x^۳}{(x-۱)^۴}$$

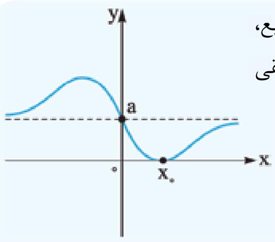
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^۲(x-۱)(۳(x-۱)-۲x)}{(x-۱)^۴}=\frac{x^۲(x-۳)}{(x-۱)^۳}$$

$\Rightarrow$

x		۰		۱		۳	
y′	+ ↗		+ ↗	ت ن	− ↘	min	+ ↗

$$\Rightarrow \min\begin{cases}x=۳\\ y=f(۳)=\frac{۲۷}{۴}=۶/۷۵\end{cases}$$

۴۴۴ **گزینه ۲** **اولاً**: طبق ضابطهٔ تابع، خط $y=a$ (حدود بی‌نهایت) مجانب افقی تابع است:



پس طبق نمودار می‌توان گفت تابع از نقطهٔ $(۰,a)$ می‌گذرد:

$$f(x)=\frac{ax^۲+bx+۸}{x+۴}\xrightarrow{(۰,a)}a=\frac{۰+۰+۸}{۰+۴}\Rightarrow a=۲$$

ثانیاً: عرض min برابر صفر است؛ پس معادله $f(x)=۰$، ریشهٔ مضاعف دارد (آن هم ریشهٔ مضاعفی مثبت، چون $x_۰>۰$ است).

$$f(x)=۰\Rightarrow ۲x^۲+bx+۸=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^۲-۶۴=۰\Rightarrow b=\pm ۸$$

به ازای $b=۸$، معادلهٔ $۲x^۲+bx+۸$ به شکل $۲x^۲+۸x+۸$ درآمده و ریشهٔ مضاعف منفی دارد که قابل قبول نیست:

$$۲x^۲+۸x+۸=۲(x^۲+۴x+۴)=۲(x+۲)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه}}x=-۲<۰$$

پس $b=-۸$ قابل قبول است و $a+b=-۶$ خواهد بود.

۴۴۵ **گزینه ۱** با توجه به نمودار، تابع دو مجانب قائم قرینه هم دارد؛ پس مخرج باید دو ریشهٔ قرینه داشته باشد، در نتیجه:

$$۱)\ \Delta>۰\Rightarrow b^۲-۴a>۰\xrightarrow{b=۰}a<۰$$

$$۲)\ \text{دو ریشهٔ قرینه}\Rightarrow S=۰\Rightarrow -\frac{b}{a}=۰\Rightarrow b=۰$$

۴۴۶ **گزینه ۳** ضابطهٔ تابع را با مخرج مشترک‌گیری، ساده‌تر می‌کنیم:

$$y=ax+b+\frac{x^۲}{۲x-۱}=\frac{۲ax^۲+۲bx-ax-b+x^۲}{۲x-۱}$$

برای این‌که تابع هموگرافیک باشد، باید صورت و مخرج کسر عبارت خطی باشد؛ پس در صورت کسر $x^۲$ باید حذف شود، بنابراین $۲a=-۱$ و در نتیجه $a=-\frac{۱}{۲}$، می‌باشد.

به ازای $a=-\frac{۱}{۲}$ ضابطهٔ تابع را می‌نویسیم:

$$y=\frac{۲bx+\frac{۱}{۲}x-b}{۲x-۱}$$

تابع محور y را در نقطه‌ای به عرض یک قطع کرده؛ پس $f(۰)=۱$ می‌باشد:

$$۱=\frac{۰+۰-b}{۰-۱}\Rightarrow b=۱$$

در نتیجه $a+b=\frac{۱}{۲}$ است.

۴۴۷ **گزینه ۱** **اولاً**: در اطراف ریشه تغییر علامت نداریم پس، چندجمله‌ای ریشهٔ مضاعف دارد؛ یعنی $\Delta=۰$ است:

$$۶^۲-۴(m+۱)(m-۷)=۰\Rightarrow (m+۱)(m-۷)=۹$$

$$\Rightarrow m^۲-۶m-۱۶=۰\Rightarrow (m-۸)(m+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۸\\ m=-۲\end{cases}$$

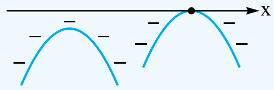
ثانیاً: چون علامت جدول همواره منفی است؛ پس ضریب $x^۲$ منفی بوده، بنابراین $m+۱<۰$، یعنی از بین جواب‌های به دست آمده $m=-۲$ قبول است.

ثالثاً: عدد n، همان ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای درجه دو؛ یعنی $-\frac{b}{۲a}$ است:

$$m=-۲\Rightarrow P(x)=-x^۲+۶x-۹\Rightarrow n=-\frac{۶}{۲(-۱)}=۳$$

بنابراین $m+n=۱$ خواهد بود.

۴۴۸ گزینه ۲ طبق سؤال عبارت $(m+۱)x^۲-۸x+m+۱$ همواره نامثبت است؛ پس یا ریشه ندارد یا اگر دارد مضاعف است، یعنی $\Delta \le ۰$:



اولاً: دهانه سهمی رو به پایین است، پس: ضریب $x^۲$ منفی است:

$m+۱<۰ \Rightarrow \boxed{m<-۱}$ (I)

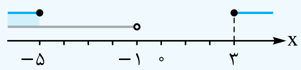
ثانیاً: باید $\Delta \le ۰$ باشد:

$۶۴-۴(m+۱)(m+۱)\le ۰ \Rightarrow -۴(m+۱)^۲\le -۶۴$

$\Rightarrow (m+۱)^۲\ge ۱۶ \xrightarrow{\sqrt{\ }} |m+۱|\ge ۴ \Rightarrow m+۱\le -۴$ یا $m+۱\ge ۴$

$\Rightarrow \boxed{m\le -۵ \text{ یا } m\ge ۳}$ (II)

بنابراین از اشتراک جواب‌های (II) و (I) خواهیم داشت:

 $\Rightarrow m<-۵$

۴۴۹ گزینه ۳ عبارت $P(x)=ax+b$ ریشه‌اش $x=۳$ بوده و ضریب x آن یعنی a منفی است (چون علامت خانهٔ اول از سمت راست منفی است)؛ پس می‌توان فرض کرد $P(x)=-x+۳$ است، یعنی $a=-۱$ و $b=۳$ می‌باشد.

در این صورت $f(x)=a-bx$ به صورت $f(x)=-۱-۳x$ است؛ پس:

x		$-\frac{۱}{۳}$	
f(x)	+	۰	−

۴۵۰ گزینه ۴ **راه اول:** طبق جدول تعیین علامت، $x=-۲$ ریشهٔ ساده و $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ هستند؛ پس $P(x)$ که درجه ۳ است، شامل $x+۲$ و $(x+۱)^۲$ است.

$P(x)=(x+۲)(x+۱)^۲=(x+۲)(x^۲+۲x+۱)$

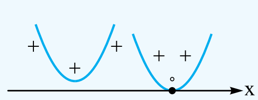
$=x^۳+۴x^۲+۵x+۲$

بنابراین طبق عبارت فوق می‌توان گفت $a=۴$ و $b=۲$ است و $a\times b=۸$ خواهد بود.

راه دوم: $x=-۱$ و $x=-۲$ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس:

$$\begin{cases}P(-۱)=۰ \Rightarrow a+b=۶\\ P(-۲)=۰ \Rightarrow ۴a+b=۱۸\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۴\\ b=۲\end{cases} \Rightarrow a\times b=۸$$

۴۵۱ گزینه ۳ $P(x)$ همواره نامنفی است؛ پس یا ریشه ندارد یا اگر دارد، ریشهٔ مضاعف دارد.



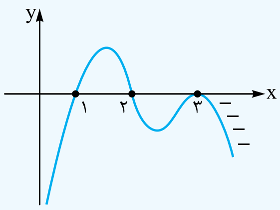
از آن‌جایی که $x^۲-۴x+۳$ به شکل $(x-۱)(x-۳)$ دارای ریشه‌های $x=۱$ و $x=۳$ است؛ پس $P(x)$ ریشه دارد. حالا باید این ریشه‌ها مضاعف باشند تا تغییر علامت در اطرافشان نداشته باشیم و عبارت همواره نامنفی باشد؛ یعنی باید $x=۱$ و $x=۳$ در پرانتز دیگر هم جزء ریشه‌ها باشند تا در کل $(x-۱)^۲$ و $(x-۳)^۲$ داشته باشیم:

$P(x)=(x-۱)(x-۳)\underbrace{(۲x^۲+ax+b)}_{x_1=۱,\ x_2=۳} \Rightarrow ۲(x-۱)(x-۳)$

$=۲x^۲\underbrace{-۸x}_{a=-۸}+\underbrace{۶}_{b=۶}$

بنابراین $a-b=-۱۴$ است.

۴۵۲ گزینه ۳ طبق نمودار تابع $f(x)$، می‌توان گفت تابع f دارای ریشه‌های سادهٔ $x=۱$ و $x=۲$ و ریشهٔ مضاعف $x=۳$ است (چون در $x=۳$ بر محور x مماس است).



همچنین شاخهٔ سمت راست نمودار $f(x)$ زیر محور x قرار دارد؛ یعنی منفی است، پس ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ $f(x)$ منفی است، بنابراین می‌توان فرض کرد که:

$\Rightarrow f(x)=-(x-۱)(x-۲)(x-۳)^۲$

بنابراین ضابطهٔ y می‌تواند این‌چنین باشد:

$y=[-(x-۱)(x-۲)(x-۳)^۲](\underbrace{x^۲-۵x+۴}_{(x-۱)(x-۴)})$

$\Rightarrow y=-(x-۱)^۲(x-۲)(x-۴)(x-۳)^۲$

حالا این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

x		۱		۲		۳		۴	
y	−	۰	−	۰	+	۰	+	۰	−

$\xrightarrow{\text{y مثبت باشد}} a\in(۲,۴) \Rightarrow \begin{cases}a=۲\\ b=۴\end{cases} \Rightarrow b-a=۲$

دقت کنید بازهٔ $(۲,۴)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که y در آن مثبت است؛ پس $b-a$ بیشترین مقدارش $۴-۲=۲$ می‌شود.

۴۵۳ گزینه ۲ ابتدا تمام عبارات را در صورت امکان تجزیه و سپس ریشه‌یابی می‌کنیم:

$$\frac{(۲x^۲-۳x-۵)(x+۱)}{(x^۲+x+۱)(۱-x)}=\frac{[(۲x-۵)(x+۱)](x+۱)}{(x^۲+x+۱)(۱-x)}$$

$$=\frac{(۲x-۵)(x+۱)^۲}{(x^۲+x+۱)(۱-x)}$$

دقت کنید $x^۲+x+۱$ ریشه ندارد $(\Delta<۰)$ و همواره مثبت است $(a>۰)$.

حالا می‌خواهیم کسر مثبت باشد، آن را تعیین علامت می‌کنیم:

اولاً: علامت ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ پرانتزها را که درهم ضرب کنیم، منفی می‌شود $\frac{۲\times ۱}{۱\times -۱}<۰$.

ثانیاً: $x=۱$ ریشهٔ مضاعف است و در اطرافش تغییر علامت نداریم:

x		−۱		۱		$\frac{۵}{۲}$	
P(x)	−	۰	−	تن	+	۰	−

$\xrightarrow{P(x)>۰} x\in(۱,\frac{۵}{۲})$

پس $a=۱$ و $b=\frac{۵}{۲}$ و در نتیجه $b-a=\frac{۳}{۲}$ است.

۴۵۴ گزینه ۳ **اولاً**: $x=۰$ ریشهٔ سادهٔ صورت و $x=۴$ ریشهٔ مضاعف صورت هستند:

$$\begin{cases}x+d=۰ \xrightarrow{x=۰} d=۰\\ (x-a)^۲=۰ \xrightarrow{x=۴} a=۴\end{cases}$$

ثانیاً: $x=-\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است؛ پس:

$a=۴ \Rightarrow \text{مخرج}=۴x^۲+bx+c=۴(x+\frac{۱}{۲})^۲=۴(x^۲+x+\frac{۱}{۴})$

$=۴x^۲+۴x+۱$

بنابراین $b=۴$ و $c=۱$ است. در نتیجه $a+b+c+d=۹$ است.

۴۵۵ گزینه ۲ چون عبارت کسری A همواره منفی است:

اولاً: ضریب بزرگ‌ترین درجه‌های صورت و مخرج، نسبتشان منفی می‌شود:

$\frac{m-۲}{-۱}<۰ \Rightarrow \boxed{m>۲}$ (I)

ثانیاً: ریشه ندارد؛ پس $\Delta<۰$ است چه در صورت چه در مخرج.

مخرج: $\Delta = -24 < 0$ ok

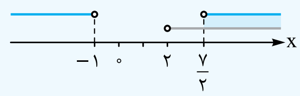
صورت: $\Delta = 36 - 4(m-2)(2m-1) < 0$

$$\Rightarrow -4(m-2)(2m-1) < -36 \Rightarrow (m-2)(2m-1) > 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 > 0 \Rightarrow (2m-7)(m+1) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -1 & & \frac{7}{2} & \\ \hline + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow \boxed{m < -1 \text{ یا } m > \frac{7}{2}} \quad (II)$$

اشتراک جواب‌های (I) و (II) این‌گونه است:



$\Rightarrow m > \frac{7}{2}$

۴۵۶ **گزینه ۲** به ازای $x > \frac{3}{2}$ عبارت مخرج مثبت می‌شود؛ پس برای این‌که کل کسر مثبت شود، باید صورت مثبت باشد؛ یعنی در بازهٔ $(2,4)$ باید عبارت $((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)$ مثبت باشد.

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & & 4 & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array}$$

اولاً $x = 2$ و $x = 4$ ریشه‌های صورت هستند. از آن‌جایی که $x = 4$ ریشهٔ $x - 3\sqrt{x} + 2$ است (چون صفرش می‌کند)؛ پس $x = 2$ ریشهٔ $(m^2-1)x^2 - 4mx + 4$ است:

$$(m^2-1)(4) - 4m(2) + 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - \cancel{4} - 8m + \cancel{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

از آن‌جایی که خانهٔ اول از سمت راست منفی است؛ پس حاصل‌ضرب علامت ضرایب بزرگ‌ترین درجه‌ها باید منفی باشد:

$$(m^2-1)(1) < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |m| < 1 \Rightarrow -1 < m < 1$$

بنابراین $m = 0$ بین جواب‌هایمان، قابل قبول است.

۴۵۷ **گزینه ۴** عبارت $A = \frac{4-2x}{3x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. ریشهٔ صورت $x = 2$ و ریشهٔ مخرج $x = -\frac{1}{3}$ است. نسبت ضریب xها $\frac{-2}{3} < 0$ است؛ پس:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -\frac{1}{3} & & 2 & \\ \hline A & - & \text{تن} & + & 0 & - \end{array} \xrightarrow{A \geq 0} -\frac{1}{3} < x \leq 2$$

بنابراین $-1 < 3x \leq 6$ و در نتیجه:

$$[3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow \text{۸ مقدار}$$

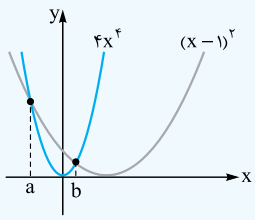
دقت کنید گرچه خود -1 در بازه نیست ولی اعداد بین ۰ و -1 که در بازه هستند، جزءصحیح آن‌ها -1 می‌شود.

۴۵۸ **گزینه ۲** باید نامعادلهٔ $(x-1)^2 > 4x^4$ را حل کنیم. از آن‌جایی که هر دو تابع پیوسته هستند؛ پس مجموعه‌جواب نامعادله، بازه‌ای است که اعداد ابتدا و انتهای آن بازه، طول نقاط برخورد دو نمودار هستند:

$$4x^4 = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 2x^2 = \pm(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = x - 1 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{جواب ندارد} \\ 2x^2 = -x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین بازهٔ $(-1, \frac{1}{2})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار $y = (x-1)^2$ بالای نمودار $y = 4x^4$ خواهد بود؛ پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر با $\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ است.



۴۵۹ **گزینه ۳** **راه اول:** همه را به یک طرف برده و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\cancel{(x-2)}(x-4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} > 0 \xrightarrow{x \neq 2} \frac{-(x-4)}{x+1} > 0$$

$$\xrightarrow{x \neq 2} \begin{array}{ccccc} & -1 & & 4 & \\ \hline - & \text{تن} & + & 0 & - \end{array} \xrightarrow{>0} x \in (-1, 4) - \{2\}$$

$$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

راه دوم: چک اعداد دلخواهی از گزینه‌ها:

$\boxed{x = 3} \Rightarrow \frac{13}{4} > \frac{3}{1} \checkmark \Rightarrow$ رد گزینه‌های (۱) و (۴)

$\boxed{x = 0} \Rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 \checkmark \Rightarrow$ رد گزینهٔ (۲)

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴۶۰ **گزینه ۲** باید نامعادلهٔ $\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$ را حل کنیم، چون مخرج ریشه ندارد (همواره مثبت است.) می‌توانیم طرفین وسطین کنیم:

$$3x^2 - 2x < 2x^2 + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$$

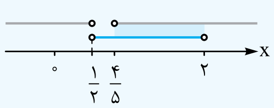
$$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -2 & & 4 & \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\xrightarrow{<0} x \in (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = 6$$

۴۶۱ **گزینه ۴** **راه اول:** دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \\ \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & \frac{1}{2} & & 2 & \\ \hline - & \text{تن} & + & 0 & - \end{array} \xrightarrow{>0} \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I) \\ \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \\ \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & \frac{1}{2} & & \frac{4}{5} & \\ \hline - & \text{تن} & + & 0 & - \end{array} \xrightarrow{<0} x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > \frac{4}{5} \quad (II) \end{cases}$$

بین جواب‌های I و II اشتراک می‌گیریم:



$\Rightarrow \frac{4}{5} < x < 2$

راه دوم: نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

$$1=\frac{x+1}{2x-1}=3 \Rightarrow \begin{cases}1=\frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow x=2\\ \frac{x+1}{2x-1}=3 \Rightarrow x=\frac{4}{5}\end{cases}$$

اعداد $\frac{4}{5}$ و ۲ باید سر یا ته بازهٔ مجموعه‌جواب نامعادله باشند.

راه سوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

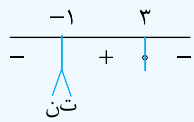
$\boxed{x=1/5} \Rightarrow 1<\frac{2/5}{2}<3\checkmark \Rightarrow$ در گزینه‌های ۱ و ۲

$\boxed{x=1} \Rightarrow 1<2<3\checkmark \Rightarrow$ در گزینهٔ ۳

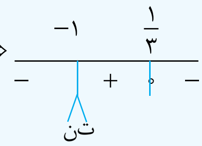
گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴۶۲ گزینه ۲ **راه اول:** دو حالت در نظر می‌گیریم:

$1)\ \frac{1-3x}{x+1}>-2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1}+2>0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1}>0$

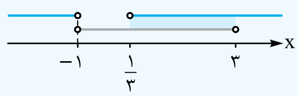
$\Rightarrow$ 

$\xrightarrow{>0} -1<x<3$

$2)\ \frac{1-3x}{x+1}<0 \Rightarrow$ 

$\xrightarrow{<0} x<-1$ یا $x>\frac{1}{3}$

حالا بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:



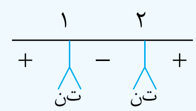
بنابراین $\frac{1}{3}<x<3$ و در نتیجه $\frac{1}{6}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}$ بوده که ۱ یا $[\frac{x}{2}]=0$ خواهد بود.

راه دوم: تبدیل به معادله:

$$-2=\underbrace{\overbrace{\frac{1-3x}{x+1}}^{x=3}}_{x=\frac{1}{3}}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}<x<3$$

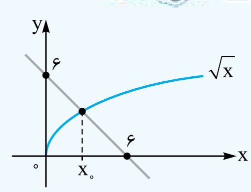
۴۶۳ گزینه ۴ باید $-2<\frac{2}{x^2-3x+2}<0$ باشد، داریم:

حالت اول:

$\frac{2}{x^2-3x+2}<0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)}<0 \Rightarrow$ 

پس باید $1<x<2$ باشد تا حاصل کسر منفی شود که در این بازه هیچ عدد صحیحی وجود ندارد؛ پس به حالت دوم هم احتیاجی نیست.

۴۶۴ گزینه ۴ **راه اول:** رسم نمودار دو طرف نامعادله

$x+\sqrt{x}\le 6 \Rightarrow \sqrt{x}\le 6-x \Rightarrow$ 

برای یافتن x_0 باید طول نقطهٔ تلاقی دو نمودار را پیدا کنیم. برای این کار باید معادلهٔ $\sqrt{x}=6-x$ را حل کنیم. (یا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم، یا این‌که حدس می‌زنیم.) x_0 باید عددی باشد که جذر داشته باشد تا دو طرف تساوی $\sqrt{x}=6-x$ برابر شوند و طبق نمودار بین ۰ و ۶ است)؛ پس $x_0=4$ می‌باشد:

$\sqrt{x}=6-x \Rightarrow \boxed{x_0=4}$

جواب نامعادلهٔ $\sqrt{x}\le 6-x$ بازه‌ای است که نمودار $\sqrt{x}$ زیر نمودار $6-x$ باشد یا با آن برخورد کند، که طبق شکل $0\le x\le 4$ خواهد بود.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

$\boxed{x=1} \Rightarrow 1+1\le 6\checkmark \Rightarrow$ در گزینه‌های (۲) و (۳)

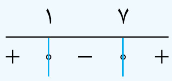
$\boxed{x=4} \Rightarrow 4+2\le 6\checkmark \Rightarrow$ در گزینهٔ (۱)

گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴۶۵ گزینه ۱

$|x-4|\ge 3 \Rightarrow x-4\le -3$ یا $x-4\ge 3 \Rightarrow x\le 1$ یا $x\ge 7$

پس باید جواب نامعادلهٔ $x^2-mx+n\ge 0$ به صورت $x\le 1$ یا $x\ge 7$ باشد؛ یعنی علامت عبارت x^2-mx+n در $(-\infty,1]\cup[7,+\infty)$ بزرگ‌تر مساوی صفر باشد:

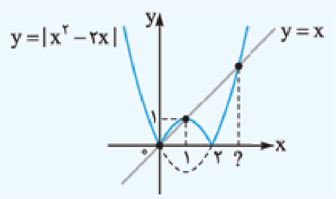


$\xrightarrow{\text{۷ و ۱ ریشه‌هاهستند}}$

$x^2-mx+n=(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$

بنابراین $m=8$ و $n=7$ بود؛ پس $m+n=15$ است.

۴۶۶ گزینه ۴ **راه اول:** رسم نمودار دو طرف نامعادله



طول نقاط برخورد دو نمودار را می‌یابیم:

$$|x^2-2x|=x \begin{cases}\xrightarrow{\text{طبق نمودار}} x_1=0, x_2=1\\ \xrightarrow[?>2]{} x^2-2x=x \Rightarrow x^2-3x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=3\checkmark\end{cases}$$

جواب نامعادلهٔ $|x^2-2x|<x$ یعنی بازه‌ای که نمودار $y=|x^2-2x|$ زیر نمودار $y=x$ باشد، طبق شکل در بازهٔ $1<x<3$ این اتفاق افتاده.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

$\boxed{x=1} \Rightarrow |1-2|<1 \Rightarrow 1<1\times \Rightarrow$ در گزینهٔ (۲)

$\boxed{x=2} \Rightarrow |4-4|<2 \Rightarrow 0<2\checkmark \Rightarrow$ در گزینه‌های (۱) و (۳)

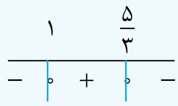
گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴۶۷ گزینه ۲ با دقت به ریشهٔ مخرج، طرفین‌وسطین کرده و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left|\frac{2-x}{2x-3}\right|>1 \xrightarrow{x\neq\frac{3}{2}} |2-x|>|2x-3|$$

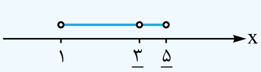
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (2-x)^2>(2x-3)^2$$

$$(2-x)^2-(2x-3)^2>0 \xrightarrow[a^2-b^2]{\text{مزدوج}} (\underbrace{x-1}_{a+b})(\underbrace{-3x+5}_{a-b})>0$$

$\Rightarrow$ 

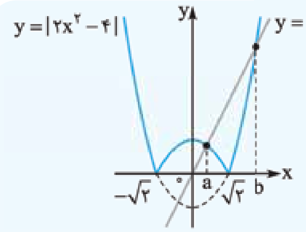
$\xrightarrow{>0} 1<x<\frac{5}{3}$

از آن‌جایی که $x\neq\frac{3}{2}$، پس:



$\Rightarrow x\in(1,\frac{5}{3})-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

۴۶۸ گزینه ۱ باید نامعادلهٔ $|2x^2-4|<2x$ را حل کنیم.
رسم نمودار خیلی خوبه:



در بازهٔ (a,b) نمودار $y=|2x^2-4|$ زیر نمودار $y=2x$ است که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار هستند که یکی قبل از $\sqrt{2}$ و دیگری بعد از $\sqrt{2}$ است. کافی است حدس بزنیم چه اعدادی در قبل و بعد از $\sqrt{2}$ دو طرف را برابر می‌کنند:

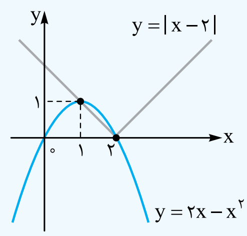
$$|2x^2-4|=2x\begin{cases}\xrightarrow{x<\sqrt{2}} x=1\\ \xrightarrow{x>\sqrt{2}} x=2\end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله، بازهٔ $(1,2)$ است؛ پس $b-a=1$ خواهد بود.

۴۶۹ گزینه ۴ **راه اول:** عبارت x^2+1 همواره مثبت است؛ پس

$$|x^2+1|=x^2+1$$

$$2x+1-|x-2|>x^2+1$$
$$\Rightarrow 2x-x^2>|x-2|$$



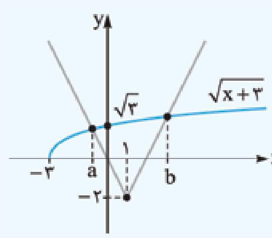
مشخص است که برای $1<x<2$ نمودار $y=2x-x^2$ بالای نمودار $y=|x-2|$ است.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها:

$$\boxed{x=0}\Rightarrow 0+1-|-2|>0+1\Rightarrow -1>1$$ نادرست

همهٔ گزینه‌ها $x=0$ را دارند به‌جز گزینهٔ (۴).

۴۷۰ گزینه ۳ می‌خواهیم نامعادلهٔ $\sqrt{x+3}>|x-1|-2$ را حل کنیم.



از رسم نمودار استفاده می‌کنیم:
طبق نمودار در بازهٔ (a,b) نمودار $y=\sqrt{x+3}$ بالای نمودار $y=|x-1|-2$ است که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار هستند:

$$\sqrt{x+3}=|x-1|-2\xrightarrow{-3<a<0}\sqrt{x+3}=-x+1-2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+3}=-x-1\xrightarrow{\text{حدس}}\boxed{x=-2}$$
$$\sqrt{x+3}=|x-1|-2\xrightarrow{b>1}\sqrt{x+3}=x-1-2\Rightarrow\sqrt{x+3}$$
$$=x-3\xrightarrow{\text{حدس}}\boxed{x=6}$$

پس $(a,b)=(-2,6)$؛ بنابراین $b-a=8$ است.

وایسا، نروا! دقت کنید وقتی حدس زدیم $x=6$؛ یعنی عددی پیدا کردیم که وقتی جای x در $\sqrt{x+3}$ قرار می‌گیرد، $x+3$ مربع کامل شود و باعث شود دو طرف تساوی برابر شوند.

۴۷۱ گزینه ۱ $||x-1|-3|<4\Rightarrow -4<|x-1|-3<4$

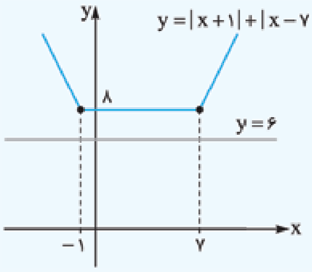
$$\xrightarrow{+3}\overbrace{-1<|x-1|}^{\text{بدیهی}}<7$$

باید نامعادلهٔ $|x-1|<7$ را حل کنیم:

$$-7<x-1<7\xrightarrow{+1}-6<x<8$$
$$\xrightarrow{\text{صحیح}} x=-5,-4,\dots,6,7$$

مجموع اعداد حاصل‌شده برابر با $13=7+6$ می‌باشد، چون از -5 تا 5 همه دوتا دوتا قرینه‌اند و خنثی می‌شوند.

۴۷۲ گزینه ۱ مشخص است که نمودار تابع $y=|x+1|+|x-7|$ همواره بالای خط $y=6$ است؛ پس هر عدد حقیقی می‌تواند جواب نامعادلهٔ $|x+1|+|x-7|>6$ باشد.



۴۷۳ گزینه ۱

$$15x^2+73x+14<0\Rightarrow \underbrace{x^2+73x+210}_{(x+70)(x+3)}<0$$
$$\times$$
$$\Rightarrow (15x+70)(x+\frac{3}{15})<0$$

$$-\frac{14}{3}\quad -\frac{70}{15}\quad -\frac{3}{15}\qquad + \quad - \quad +\qquad \xrightarrow{<0}\ -\frac{14}{3}<x<-\frac{1}{5}\quad (I)$$

$$|\frac{x-1}{2}-1|>3\Rightarrow|\frac{x-3}{2}|>3\begin{cases}\frac{x-3}{2}>3\Rightarrow x>9\\ \frac{x-3}{2}<-3\Rightarrow x<-3\end{cases}\quad (II)$$

حالا:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)}\ \overset{a}{-\frac{14}{3}}<x<\overset{b}{-3}\Rightarrow b-a=\frac{5}{3}$$

۴۷۴ گزینه ۳ عدد فرد را به فرم $2x+1$ نشان می‌دهیم. پس اعداد فرد متوالی به شکل $\dots,2x-1,2x+1,2x+3,2x+5,\dots$ می‌باشند.

$$(2x-1)^2+(2x+1)^2+(2x+3)^2=83$$
$$\Rightarrow (4x^2-4x+1)+(4x^2+4x+1)+(4x^2+12x+9)=83$$
$$\Rightarrow 12x^2+12x-72=0\xrightarrow{\div 12}x^2+x-6=0$$
$$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=2\end{cases}$$

حالا خواهیم داشت:

$$x=2\xrightarrow{\text{اعداد}}3,5,7\xrightarrow{\text{مجموع}}15$$

۴۷۵ گزینه ۳ پول اکرم را x و پول علی را y در نظر می‌گیریم.

$$\boxed{x+y=100\Rightarrow y=100-x}\qquad (*)$$

علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم داده است، پس پول علی $y-10$ و پول اکرم $x+10$ تومان می‌شود. حاصل‌ضرب پولشان در حالت جدید ۴۷۵ تومان شده، پس:

$$(x+10)(y-10)=475\xrightarrow{(*)}(x+10)(100-x-10)=475$$
$$\Rightarrow (x+10)(90-x)=475\Rightarrow -x^2+80x+900=475$$
$$\Rightarrow x^2-80x-425=0\Rightarrow (x-85)(x+5)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-5 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=85\end{cases}$$

۴۷۶ گزینه ۱ طبق روش Δ ریشه‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\alpha}}{2}=-3\pm\sqrt{9-\alpha}$$

بنابراین چون $\alpha<\beta$:

$$3\alpha^2+2\beta^2=3(-3-\sqrt{9-\alpha})^2+2(-3+\sqrt{9-\alpha})^2$$

طول نقطهٔ عطف $= -\frac{-(m-۱)}{۳(\frac{۲}{۳})} = \frac{m-۱}{۲}$

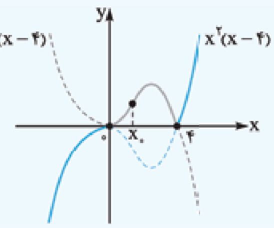
با توجه به حدود m، حدود طول نقطهٔ عطف تابع را می‌یابیم:

$$m<-۳ \Rightarrow m-۱<-۴ \Rightarrow \frac{m-۱}{۲}<-۲$$

۸ گزینه ۴ و باز هم رسم نمودار:

$$y = x|x^۲-۴x| = \begin{cases} x(x^۲-۴x) & x^۲-۴x\ge ۰ \\ x(۴x-x^۲) & x^۲-۴x<۰\end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^۲(x-۴) & x<۰ \text{ یا } x>۴ \\ -x^۲(x-۴) & ۰<x<۴\end{cases}$$



طول نقاط عطف تابع، $x=۰$ و $x=x_۰$ است. برای یافتن $x_۰$ می‌توان $f''(x)=۰$ را بررسی کرد:

$$f(x)=-x^۲(x-۴) \Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۸x$$

$$\Rightarrow f''(x)=-۶x+۸=۰ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

۹ گزینه ۴ **اولاً**: در $x=۰$ و $x=۳$ مماس افقی است؛ پس f' صفر است:

$$y'=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow ۰=۰ \\ x=۳ \Rightarrow ۱۰۸+۲۷a+۶b=۰ \ (I)\end{cases}$$

ثانیاً: $x=۰$ طول عطف است؛ پس f'' صفر است:

$$y''=۱۲x^۲+۶ax+۲b \xrightarrow{x=۰} b=۰ \xrightarrow{(I)} a=-۴$$

بنابراین: $f(x)=x^۴-۴x^۳ \Rightarrow f(-۲)=۱۶+۳۲=۴۸$

۱۰ گزینه ۱ **اولاً**: $x=۰$ مجانب قائم (انفصال مضاعف) است؛ پس ریشهٔ مضاعف مخرج است، یعنی $b=۰$ است.

ثانیاً: تابع از نقطهٔ $(۲,۰)$ می‌گذرد؛ پس:

$$f(x)=\frac{ax+۲}{x^۲} \xrightarrow{(۲,۰)} ۰=\frac{۲a+۲}{۴} \Rightarrow a=-۱$$

بنابراین $f(x)=\frac{-x+۲}{x^۲}$، حال برای یافتن min نسبی داریم:

$$f'(x)=\frac{-(x^۲)-۲x(-x+۲)}{x^۴}=\frac{-x^۲+۲x^۲-۴x}{x^۴}$$

$$=\frac{x^۲-۴x}{x^۴}=\frac{x-۴}{x^۳} \Rightarrow$$

x		۰		۴	
y'	+ ↗	ت‌ن	− ↘	min	+ ↗

تابع f در $x=۴$ دارای min نسبی با مقدار $f(۴)=-\frac{۱}{۸}$ است.

فصل ششم
تعیین علامت و نامعادله

۱ گزینه ۴ طبق جدول تعیین علامت $f(x)$:

اولاً: معادله دو ریشه دارد؛ پس $\Delta>۰$:

$$(m-۱)^۲-\cancel{۴}(m^۲-m-۲)(\frac{۱}{\cancel{۴}})>۰$$

$$\Rightarrow (\cancel{m^۲}-۲m+۱)-(\cancel{m^۲}-m-۲)>۰ \Rightarrow \boxed{m<۳}$$

ثانیاً: خانهٔ اول از سمت راست منفی است؛ پس ضریب $x^۲$ منفی است:

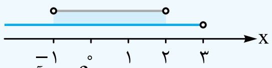
$$m^۲-m-۲<۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)<۰$$

$\Rightarrow$

	−۱		۲	
+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow \boxed{-۱<m<۲}$

بنابراین از اشتراک دو جواب بالا داریم:



$\Rightarrow -۱<m<۲$

۲ گزینه ۳ باید بزرگ‌ترین بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع f در آن‌جا منفی شود تا نمودارش زیر محور xها قرار گیرد:

$$x^۳-۴x^۲-x+۴<۰ \xrightarrow{\text{فاکتور}} x^۲(x-۴)-(x-۴)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} (x-۴)(x^۲-۱)<۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۱)(x+۱)<۰$$

$\Rightarrow$

x		−۱		۱		۴	
f	−	۰	+	۰	−	۰	+

$\xrightarrow{f \text{ منفی}} x<-۱$ یا $۱<x<۴$

با شرط $x>-۱$ بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع f در آن بازه زیر محور xها قرار می‌گیرد، بازهٔ $(۱,۴)$ است؛ پس حداکثر $b-a$ برابر با $۴-۱=۳$ خواهد بود.

۳ گزینه ۴ چون علامت $P(x)$ در بازهٔ $(-۱,۶)$ مثبت است؛ پس $x=-۱$ و $x=۶$ ریشه‌های صورت و مخرج $P(x)$ هستند، یعنی جدول تعیین علامت $P(x)$ یکی از دو حالت زیر است:

x		−۱		۶	
P(x)	−	ت‌ن	+	۰	−

یا

x		−۱		۶	
P(x)	−	۰	+	ت‌ن	−

علامت خانهٔ اول از سمت راست منفی است؛ پس ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و مخرج باید نسبتشان منفی شود: $\frac{a}{۳}<۰ \Rightarrow a<۰$

از کجا بفهمیم بین $x=-۱$ و $x=۶$ کدام‌یک ریشهٔ صورت است؟ آهان، از آن‌جایی که باید a منفی به دست بیاد؛ پس $x=۶$ ریشهٔ صورت هست:

$$ax+۱۲=۰ \xrightarrow{x=۶} ۶a+۱۲=۰ \Rightarrow a=-۲$$

$x=-۱$ هم ریشهٔ مخرج است:

$$۳x+b=۰ \xrightarrow{x=-۱} -۳+b=۰ \Rightarrow b=۳$$

بنابراین $a-b=-۵$ است.

۴ گزینه ۲ صورت و مخرج کسر ساده می‌شوند. حواسمان به ریشهٔ مخرج باشد و ساده کنیم:

$$\frac{x^۲-x-۶}{x^۲-۳x-۱۰}\ge ۲ \Rightarrow \frac{(x-۳)\cancel{(x+۲)}}{(x-۵)\cancel{(x+۲)}}\ge۲$$

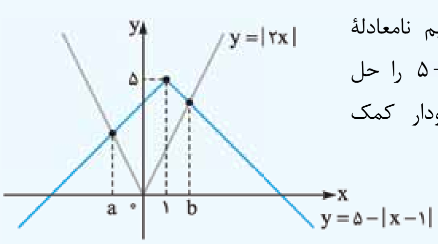
$$\xrightarrow{x\ne-۲} \frac{x-۳}{x-۵}\ge ۲ \Rightarrow \frac{x-۳}{x-۵}-۲\ge۰$$

$\xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{-x+۷}{x-۵}\ge۰ \Rightarrow$

	۵		۷	
−	ت‌ن	+	۰	−

$$\xrightarrow{\ge۰} x\in(۵,۷] \Rightarrow b+a=۷+۵=۱۲$$

۵ گزینه ۳ **راه اول**: می‌خواهیم نامعادلهٔ $|۲x|>۵-|x-۱|$ را حل کنیم. از رسم نمودار کمک می‌گیریم:



می‌خواهیم ببینیم نمودار تابع $y=۵-|x-۱|$ در چه بازه‌ای بالای نمودار $y=|۲x|$ است. طبق نمودار در بازهٔ (a,b) این اتفاق می‌افتد که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار است:

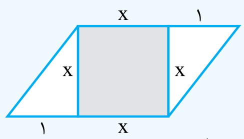
$$۵-|x-۱|=|۲x| \begin{cases} \xrightarrow[x<۰]{a<۰} ۵-(-x+۱)=-۲x \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \\ \xrightarrow[b>۱]{x>۱} ۵-(x-۱)=۲x \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a,b)=(-\frac{۴}{۳},۲)$$

راه دوم: امتحان گزینه‌ها (به عهدهٔ خودتون)

فصل هفتم
معادلات و سهمی

۱ گزینه ۳



مساحت مربع $=x^۲$

مساحت هر مثلث $=\frac{۱}{۲}(۱)(x)=\frac{x}{۲}$

مساحت مربع $\frac{۳}{۴}$ از مساحت هر مثلث $\frac{۲۷}{۳۲}$ بیشتر است:

$$x^۲-\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۲}x)=\frac{۲۷}{۳۲} \Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۸}x-\frac{۲۷}{۳۲}=۰$$

با روش Δ داریم:

$$\Delta=(-\frac{۳}{۸})^۲-۴(۱)(-\frac{۲۷}{۳۲})=\frac{۹}{۶۴}+\frac{۲۷}{۸}=\frac{۲۲۵}{۶۴}$$

$$x=\frac{\frac{۳}{۸}\pm\sqrt{\frac{۲۲۵}{۶۴}}}{۲(۱)}=\frac{\frac{۳}{۸}\pm\frac{۱۵}{۸}}{۲}= \begin{cases} x=\frac{۹}{۸} \\ x=-\frac{۳}{۴} \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

طول ضلع نمی‌تواند عدد منفی شود، پس $x=\frac{۹}{۸}$ و در نتیجه قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $۱+\frac{۹}{۸}$ یعنی $\frac{۱۷}{۸}$ است.

۲ گزینه ۱

$$S=\frac{۱}{P} \Rightarrow -\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m} \Rightarrow -(۲m-۱)(۲-m)=۹$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۵m+۲=۹ \Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

چون معادله دو ریشهٔ حقیقی داشته، نباید Δ منفی باشد:

$$m=-۱ \xrightarrow{\text{معادله}} ۳x^۲-۳x+۳=۰$$

$$\Delta=۹-۴(۳)(۳)=-۲۷<۰$$

پس فقط $m=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۳ گزینه ۲

اولاً: $P=\frac{c}{a} \Rightarrow ab=a+b-۱ \Rightarrow ab-a=b-۱$

$$\Rightarrow a\cancel{(b-۱)}=\cancel{b-۱} \xrightarrow{b\neq ۱} a=۱$$

ثانیاً: $S=-\frac{b}{a} \Rightarrow a+b=a^۲+b^۲-۱۲$

$$\xrightarrow{a=۱} ۱+b=۱+b^۲-۱۲$$

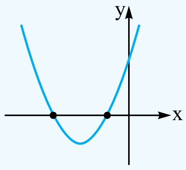
$$\Rightarrow b^۲-b-۱۲=۰ \Rightarrow (b-۴)(b+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ b=-۳ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases} \xrightarrow{a=۱} a+b=۵$$

۴ گزینه ۳ **راه اول:** ابتدا ضابطهٔ معادله را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=۲x^۲+m(۱-x)+x+۵=۲x^۲+x-mx+m+۵$$
$$=۲x^۲+(۱-m)x+m+۵$$

چون محور xها را در دو نقطه سمت چپ مبدأ قطع کرده، پس دو ریشهٔ منفی دارد:



$$۱)\ \Delta>۰ \Rightarrow (۱-m)^۲-۸(m+۵)>۰ \Rightarrow m^۲-۱۰m-۳۹>۰$$

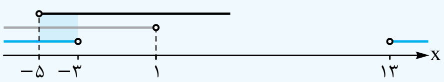
$$\Rightarrow (m-۱۳)(m+۳)>۰ \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} & -۳ & ۱۳ & \\ + & - & + \end{array}$$

$$\xrightarrow{>۰} \boxed{m<-۳ \text{ یا } m>۱۳}$$

$$۲)\ S<۰ \Rightarrow -\frac{۱-m}{۲}<۰ \Rightarrow \boxed{m<۱}$$

$$P>۰ \Rightarrow \frac{m+۵}{۲}>۰ \Rightarrow \boxed{m>-۵}$$

اشتراک جواب‌های بالا $-۵<m<-۳$ است



راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه به جای m:

$$m=-۴: f(x)=۲x^۲+۵x+۱ \Rightarrow \begin{cases} \Delta=۱۷>۰ \\ S=-\frac{۵}{۲}<۰ \\ P=\frac{۱}{۲}>۰ \end{cases}$$

فقط گزینهٔ (۳) شامل $m=-۴$ است.

۵ گزینه ۱ در معادلهٔ $x=۵-x^۲$ می‌توان گفت $S=-۱$ و $P=-۵$ و همچنین:

$$x+x^۲=۵ \Rightarrow x(۱+x)=۵ \Rightarrow ۱+x=\frac{۵}{x}$$

بنابراین: $۱+x_۱=\frac{۵}{x_۱} \quad , \quad ۱+x_۲=\frac{۵}{x_۲}$

پس در معادلهٔ جدید، ریشه‌ها $\frac{۱}{(\frac{۵}{x_۱})^۳}$ و $\frac{۱}{(\frac{۵}{x_۲})^۳}$ یعنی $\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}$ و $\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}$ هستند:

$$S'=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{S^۳-۳PS}{۱۲۵}=\frac{(-۱)^۳-۳(-۵)(-۱)}{۱۲۵}=\frac{-۱۶}{۱۲۵}$$

فقط در گزینهٔ (۱)، مجموع ریشه‌ها $-\frac{۱۶}{۱۲۵}$ است.

۶ گزینه ۲ رأس سهمی نقطهٔ $A(-۱,۹)$ است؛ پس معادلهٔ آن به شکل $y=a(x+۱)^۲+۹$ می‌باشد. حال نقطهٔ $(۳,۱)$ را در ضابطهٔ سهمی صدق می‌دهیم:

$$۱=a(۳+۱)^۲+۹ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲+۹$$

در بین گزینه‌ها، نقطهٔ $(۵,-۹)$ در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$-۹=-\frac{۱}{۲}(۵+۱)^۲+۹ \Rightarrow -۹=-۹ \quad \text{OK}$$

۷ گزینه ۴